- Ούλοφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
  Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
- Θεοδάμαντος 2
  Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 180
- Φανερωμένης 13
  Χολαργός , ☎ 210 65 36 551

Φροντιστήριο Εν δυνάμει

Απαντήσεις Μαθηματικά Κατεύθυνσης 2014

Θέμα Α

Α1. Βιβλίο σελ.251

Α2. Βιβλίο σελ.273

Α3. Βιβλίο σελ.150

Α4. Λ , Σ , Σ , Σ , Λ

Θέμα Β

Β1. Είναι : $2|z|^2+(z+\bar{z})i-4-2i=0 \overset{z=x+yi}{\Longleftrightarrow} 2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+2xi-4-2i=0$

$\Leftrightarrow 2(x^2+y^2)+2xi-4-2i=0 \Leftrightarrow (2x^2+2y^2-4)+(2x-2)i=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2=0 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \text{ ή } y=-1 \\ x=1 \end{cases}$ άρα $z_1=1+i$, $z_2=1-i$

Β2.

- $\frac{z_1}{z_1}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=i$, οπότε $w=3(\frac{z_1}{z_1})^{39}=3i^{39}=3i^{4\cdot 9+3}=3i^3=-3i$

Β3.

- $|u+w|=|4z_1-z_2-i| \Leftrightarrow |u-3i|=|3+4i| \Leftrightarrow |u-3i|=5$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού u είναι κύκλος με κέντρο Κ(0,3) και ακτίνα ρ=5

- **Ούλοφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1**
  Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
- **Θεοδάμαντος 2**
  Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 180
- **Φανερωμένης 13**
  Χολαργός , ☎ 210 65 36 551

Θέμα Γ

Γ1. $h(x) = x - ln(e^x + 1)\ , x \in \mathbb{R}$

- $h'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1}$
- $h''(x) = \frac{-e^x}{(e^x+1)^2} < 0$ εφόσον $-e^x < 0$ $και$ $(e^x+1)^2 > 0$

Άρα η h είναι κοίλη για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Γ2. Έχουμε ότι $h'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1} > 0 \dashrightarrow h \uparrow, \forall x \in \mathbb{R}$

Είναι : $e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow lne^{h(2h'(x))} < ln\frac{e}{e+1} \Leftrightarrow h\big(2h'(x)\big) < lne - \ln(e+1) \Leftrightarrow$

$$h\big(2h'(x)\big) < h(1) \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} 2h'(x) < 1 \Leftrightarrow h'(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow h'(x) < h'(0) \overset{h'\downarrow}{\Longleftrightarrow} x > 0$$

Γ3.

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}(x - ln(e^x+1)) = \lim_{x\to+\infty}(lne^x - ln(e^x+1)) = \lim_{x\to+\infty}\left(ln\frac{e^x}{e^x+1}\right)$$

*Θέτουμε $u = \frac{e^x}{e^x+1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$ άρα $u \to 1$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ln\frac{e^x}{e^x+1}\right) = \lim\limits_{u\to1} lnu = 0 \dashrightarrow H$ $y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

Έστω $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ πλάγια ασύμπτωτη της Ch στο $-\infty$ τότε έχουμε :

- $\lambda = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-ln(e^x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{e^x}{e^x+1}}{1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x+1} = 1$
- $\beta = \lim\limits_{x\to-\infty}(h(x) - x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-ln(e^x+1)) = -ln1 = 0$

$Άρα$ $(\varepsilon): y = x$

Γ4. Προφανής λύση της εξίσωσης $\varphi(x) = 0 :$ $x = 0$

- Για $x > 0 \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} h(x) > h(0) \Leftrightarrow h(x) > -ln2 \Leftrightarrow h(x) + ln2 > 0 \overset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow} e^x(h(x) + ln2) > 0$

Άρα $\varphi(x) > 0$ $\forall x > 0$

- Για $x < 0 \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} h(x) < h(0) \Leftrightarrow h(x) < -ln2 \Leftrightarrow h(x) + ln2 < 0 \overset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow} e^x(h(x) + ln2) < 0$

Άρα $\varphi(x) < 0$ $\forall x < 0$

Επομένως η Φ έχει μοναδική λύση $x = 0$ και $\varphi(x) > 0 \quad \forall x > 0$

- $E(\Omega) = \int_0^1 |\varphi(x)|dx = \int_0^1 \varphi(x)dx = \int_0^1 \left(e^x(h(x) + ln2)\right)dx =$

$$= [e^x(h(x) + ln2)]_0^1 - \int_0^1 \left(e^x h'(x)\right)dx = [e^x(h(x) + ln2)]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right)dx$$

$$= [e^x(h(x) + ln2)]_0^1 - [ln(e^x + 1)]_0^1 = \cdots = ln2 + e + eln2 - (e + 1)\, ln(1 + e)$$

Θέμα Δ

Δ1.

- $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 0$
- $f(0) = 0$

Οπότε f συνεχής στο 0

$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ $,\forall x \neq 0$ με $f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$ $\forall x \neq 0$

Θέτουμε την συνάρτηση $g(x) = xe^x - e^x + 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ με $g'(x) = xe^x$

$\boldsymbol{x}$	**0**	
$\boldsymbol{g'(x)}$	$-$	$+$
$\boldsymbol{g(x)}$	↘	↗

Η g παρουσιάζει στο 0 ολικό ελάχιστο άρα $g(x) \geq g(0) = 0$ συνεπώς $g(x) > 0$ $\forall x \neq 0$

Έχουμε $f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} > 0$ $\forall x \neq 0$ και εφόσον η f είναι συνεχής στο 0 τότε η

f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ2. α) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$ άρα η f παραγωγισιμη στο 0 με $f'(0) = \frac{1}{2}$

- Για $x > 0 \overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow} e^x > 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{x} > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$
- Για $x < 0 \overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow} e^x < 1 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{x} > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$
- $f(0) = 1 > 0$

Οπότε η $f(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Προφανής λύση της εξίσωσης $\int_1^{2f'(x)} f(u)du = 0 : \ x = 0$

Έστω $x > 0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\, f'(x) > 1 \dashrightarrow \int_1^{2f'(x)} f(u)du > 0 \dashrightarrow$ άτοπο

Έστω $x < 0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\, f'(x) < 1 \dashrightarrow \int_1^{2f'(x)} f(u)du < 0 \dashrightarrow$ άτοπο

Άρα τελικά η εξίσωσης $\int_1^{2f'(x)} f(u)du = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$

β)

- $y = \frac{e^x - 1}{x} \dashrightarrow y(t) = \frac{e^{x(t)} - 1}{x(t)}$
- $y'(t) = \frac{e^{x(t)}x'(t)x(t) - x'(t)(e^{x(t)} - 1)}{x^2(t)}$

Έχουμε ότι για $t = t_0 : x'(t_0) = 2y'(t_0)$

$$x'(t_0) = 2y'(t_0) \Leftrightarrow x'(t_0) = 2\frac{e^{x(t_0)}x'(t_0)x(t_0) - x'(t_0)(e^{x(t_0)} - 1)}{x^2(t_0)}$$

$$\overset{:x'(t_0)}{\Longleftrightarrow} 1 = 2\frac{e^{x(t_0)}x(t_0) - (e^{x(t_0)} - 1)}{x^2(t_0)} \Leftrightarrow \frac{e^{x(t_0)}x(t_0) - (e^{x(t_0)} - 1)}{x^2(t_0)} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Έχουμε τα εξής :

1) Από το Δ2 είναι $f'(0) = \frac{1}{2}$
2) $f\ κυρτη\ ,\ f' \uparrow$ άρα και $1 - 1$
3) f' συνεχής στο 0 επειδή $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{e^{x(t_0)}x(t_0) - (e^{x(t_0)} - 1)}{x^2(t_0)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f'\big(x(t_0)\big) = f'(0) \Leftrightarrow x(t_0) = 0$$

Οπότε είναι το σημείο $M(0,1)$

Δ3.

- $g(x) = (xf(x) + 1 - e)^2(x-2)^2 = (e^x - e)^2(x-2)^2 \ ,x > 0$

$$g'(x) = 2(e^x - e)(x-2)(xe^x - e^x - e)$$

Θέτουμε την συνάρτηση $w(x) = xe^x - e^x - e \ \forall x > 0$ με $w'(x) = xe^x > 0$

$w'(x) = xe^x > 0$ άρα η $w(x) \uparrow \ \forall x > 0$ οπότε η εξίσωση $w(x) = 0$ έχει το πολύ μια λύση $\forall x > 0$

$$\begin{cases} w \ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\eta\varsigma \ \sigma\tau o \ [1,2] \\ w(1) = -e < 0 \\ w(2) = e(e-1) > 0 \end{cases}$$ $\Longrightarrow$ από Θεώρημα Bolzano ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$: $w(\xi) = 0$

- Για $\xi > 0 \overset{w(x)\uparrow}{\Longleftrightarrow} w(\xi) > 0$
- Για $\xi < 0 \overset{w(x)\uparrow}{\Longleftrightarrow} w(\xi) < 0$

x	0	1	ξ	2
$e^x - e$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$w(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$g'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$g(x)$	↘	↗	↘	↗

Άρα η g εχει δυο θέσεις τοπικών ελάχιστον και μια θέση τοπικού μεγίστου .